| 머리말 |

"어떻게 하면 수학을 잘 할 수 있나요?"

학생들로부터 가장 많이 받는 질문입니다.
수학 공부를 할 때 꼭 염두에 두어야 할 세 가지를 짚어보면서 질문에 답해 보겠습니다.

첫째, 수학은 **언어**입니다.
어느 낯선 문명의 말과 글을 듣고 볼 때 낯설고 어색하여 답답함을 느끼듯이 수학도 처음에는 어색하고 답답한 수식들의 세계처럼 느껴집니다.
이때 필요한 것은 **틀릴 것을 두려워하지 않는 용기**입니다.

수학에 등장하는 정의, 성질, 법칙들은 수학의 세계에서 통용되는 기본단어, 숙어, 관용구와도 같기 때문에 그대로 써 보고, 그대로 읽어 보고, 또 쓰고, 또 읽고, … 남에게 말 할 수 있을 때까지 해야 합니다.

둘째, 수학은 **문제풀이를 통해서 이해하는 학문**입니다.
한마디로 문제를 풀어 봐야 개념이 완벽해진다는 말입니다.
이때 필요한 것은 **인내심이며 충분한 시간**입니다.

처음에는 쉬운 문제부터 시작하기 바랍니다. 처음부터 지나치게 어려운 문제에 매달리다 보면 개념의 흐름을 놓치고 자꾸만 자괴감에 휩싸이게 됩니다. 문제를 풀고 나서 반드시 개념을 다시 읽고 써 보기 바랍니다.
즉, 확신이 생기고 자신감이 생길 때까지 해야 합니다.

셋째, 수학은 **시행착오를 거치면서 터득되는 학문**입니다.
개념에 대한 단편적인 이해를 넘어 그 적용 단계에 이르면 자신에게 숨어 있던 허점들이 나타나게 됩니다.
그 허점을 극복해 나가는 과정이 수학 실력이 느는 과정입니다.
이때 필요한 것은 **냉혹하고 집요한 반성**입니다.

반드시 자신의 풀이를 되돌아보고, 왜 틀렸는지, 틀리지 않기 위해서는 무엇을 염두에 두어야 하는지 꼼꼼하게 정리해 봐야 합니다. 자기가 틀린 이유를 설명할 수 있을 때까지 해야 합니다.

이 책을 통해서 수학을 접할 여러분을 그려봅니다.
공부하는 즐거움보다 점수가 주는 위압감이 더 앞서는 시대…
그러나 위의 세 가지 사항을 명심하고 나아간다면 여러분의 수학 실력은 나날이 발전해 갈 것이라고 확신합니다.
여러분 모두의 건투를 빕니다.

– 한석만 –

수학의 원리 미리보기

• 단원을 세분화하고 꼭 필요한 내용을 수록하였습니다.
• 고등학교 학생들이 반드시 알아야 할 개념들을 개정교육과정에 맞춰 사전식으로 정리하여 쉽게 이해할 수 있도록 구성하였습니다.

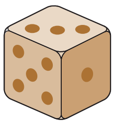
01 여러 가지 순열

$_n\mathrm{P}_r$ $_n\Pi_r$ $_n\mathrm{C}_r$ $_n\mathrm{H}_r$

01

한 개의 주사위를 던질 때,

3의 배수의 눈이 나오는 사건을 A, 4의 약수의 눈이 나오는 사건을 B 라 하면



$A=\{3, 6\}$, $B=\{1, 2, 4\}$

이다. 이때 두 사건 A, B는 동시에 일어나지 않으므로

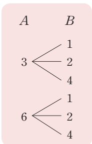
사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $3+2=5$이다.

한편, 한 개의 주사위를 두 번 던질 때,

첫 번째에 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 A,
두 번째에 4의 약수의 눈이 나오는 사건을 B

라 하면 사건 A가 일어나는 각각의 경우에 대하여 사건 B가 일어날 수 있으므로

사건 A와 사건 B가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $2\times3=6$이다.



또한, 서로 다른 n개에서 r개를 택해 일렬로 나열할 때,

첫 번째 자리에 올 수 있는 것은 n가지,
두 번째 자리에 올 수 있는 것은 $n-1$가지,
⋮
r번째 자리에 올 수 있는 것은 $(n-r+1)$가지

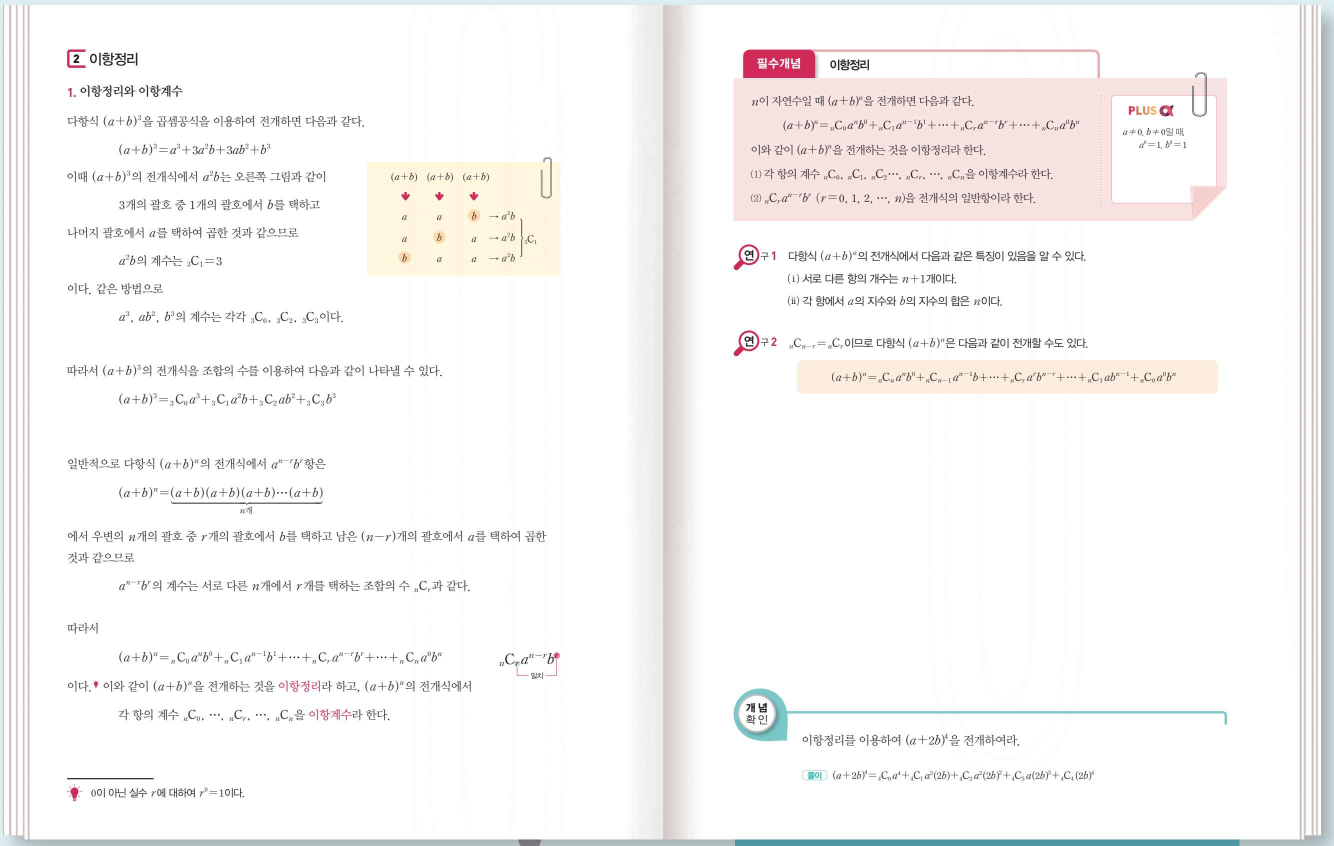
첫 번째	두 번째	⋯	r번째
n가지	$n-1$가지		$(n-r+1)$가지

이다. 따라서 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수 $_n\mathrm{P}_r$은 다음과 같다.

$$_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!} \text{ (단, } 0\le r\le n)$$

단원 들어가기

본문 내용을 학습하기에 앞서 이전에 배운 내용 또는 이 단원에서 배우는 학습 내용에 대한 기초가 되는 지식을 정리하여 개념을 더욱 쉽게 이해할 수 있도록 하였습니다.



2 이항정리

1. 이항정리와 이항계수

다항식 $(a+b)^3$을 곱셈공식을 이용하여 전개하면 다음과 같다.

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

이때 $(a+b)^3$의 전개식에서 a^2b는 오른쪽 그림과 같이

3개의 괄호 중 1개의 괄호에서 b를 택하고

나머지 괄호에서 a를 택하여 곱한 것과 같으므로

a^2b의 계수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

이다. 같은 방법으로

a^3, ab^2, b^3의 계수는 각각 ${}_3\mathrm{C}_0$, ${}_3\mathrm{C}_2$, ${}_3\mathrm{C}_3$이다.

$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$	
a	a	b	$\rightarrow a^2b$
a	b	a	$\rightarrow a^2b$
b	a	a	$\rightarrow a^2b$

${}_3\mathrm{C}_1$

따라서 $(a+b)^3$의 전개식을 조합의 수를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(a+b)^3={}_3\mathrm{C}_0a^3+{}_3\mathrm{C}_1a^2b+{}_3\mathrm{C}_2ab^2+{}_3\mathrm{C}_3b^3$$

일반적으로 다항식 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^{n-r}b^r$항은

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{개}}$$

에서 우변의 n개의 괄호 중 r개의 괄호에서 b를 택하고 남은 $(n-r)$개의 괄호에서 a를 택하여 곱한 것과 같으므로

$a^{n-r}b^r$의 계수는 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수 ${}_n\mathrm{C}_r$과 같다.

따라서

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^nb^0+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b^1+\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_na^0b^n$$

${}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$ 일치

이다. 이와 같이 $(a+b)^n$을 전개하는 것을 **이항정리**라 하고, $(a+b)^n$의 전개식에서

각 항의 계수 ${}_n\mathrm{C}_0$, $\cdots$, ${}_n\mathrm{C}_r$, $\cdots$, ${}_n\mathrm{C}_n$을 **이항계수**라 한다.

0이 아닌 실수 r에 대하여 $r^0=1$이다.

필수개념 이항정리

n이 자연수일 때 $(a+b)^n$을 전개하면 다음과 같다.

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^nb^0+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b^1+\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_na^0b^n$$

이와 같이 $(a+b)^n$을 전개하는 것을 이항정리라 한다.

(1) 각 항의 계수 ${}_n\mathrm{C}_0$, ${}_n\mathrm{C}_1$, ${}_n\mathrm{C}_2\cdots$, ${}_n\mathrm{C}_r$, $\cdots$, ${}_n\mathrm{C}_n$을 이항계수라 한다.

(2) ${}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$ $(r=0, 1, 2, \cdots, n)$을 전개식의 일반항이라 한다.

PLUS α

$a\neq0$, $b\neq0$일 때, $a^0=1$, $b^0=1$

연구 1 다항식 $(a+b)^n$의 전개식에서 다음과 같은 특징이 있음을 알 수 있다.

(i) 서로 다른 항의 개수는 $n+1$개이다.

(ii) 각 항에서 a의 지수와 b의 지수의 합은 n이다.

연구 2 ${}_n\mathrm{C}_{n-r}={}_n\mathrm{C}_r$이므로 다항식 $(a+b)^n$은 다음과 같이 전개할 수도 있다.

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_na^nb^0+{}_n\mathrm{C}_{n-1}a^{n-1}b+\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^rb^{n-r}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_1ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_0a^0b^n$$

개념 확인

이항정리를 이용하여 $(a+2b)^4$을 전개하여라.

풀이 $(a+2b)^4={}_4\mathrm{C}_0a^4+{}_4\mathrm{C}_1a^3(2b)+{}_4\mathrm{C}_2a^2(2b)^2+{}_4\mathrm{C}_3a(2b)^3+{}_4\mathrm{C}_4(2b)^4$

개념 정리

개념에 대한 설명 및 공식, 성질 등을 실례를 들어 구체적으로 자세히 설명하여 쉽고 정확하게 이해할 수 있도록 하였습니다.
또한, 개념 설명과 필수개념이 마주보고 있어 효과적으로 학습할 수 있도록 하였습니다.

필수개념 개념을 한눈에 확인할 수 있도록 정리

PLUS α 개념 이해에 도움이 되는 용어 및 간단한 공식 정리

연구 학습 내용 중 확장, 심화, 통합할 수 있는 내용을 정리

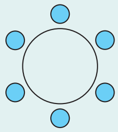
개념 확인 학습한 내용을 바로 확인할 수 있는 문제

필수문제 | 1 **원탁에 둘러앉는 방법의 수** ▶Link P. 13 필수개념, 연구 2

부모를 포함한 6명의 가족이 오른쪽 그림과 같은 원형의 탁자에 둘러앉을 때, 다음을 구하여라.

(1) 부모가 이웃하여 앉는 방법의 수

(2) 부모가 서로 마주 보고 앉는 방법의 수



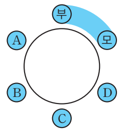
풀이

(1) 부모를 묶어 한 사람으로 생각하면 5명이 원형의 탁자에 둘러앉는 방법의 수는

$\frac{5!}{5}=4!=24$

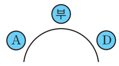
이 각각의 경우에 대하여 부모가 서로 자리를 바꾸는 경우가 2가지씩이다.
따라서 구하는 방법의 수는

$24\times2=48$



(2) 부모가 서로 마주 보고 앉는 방법의 수는

$\frac{2!}{}=1$



필수 문제

실전에 자주 출제되는 문제들을 엄선하여 해결 과정을 제시함으로써
해당 유형에 대한 이해를 확실히 할 수 있도록 하였습니다.

노트 필기

꼭 알아야 할 개념들을 되짚어 주어 실전에 활용할 수 있도록 하였습니다.

유제

필수문제와 유사한 문제로
유형에 대해 반복 학습을 할
수 있도록 제시하였습니다.

노트 필기

서로 다른 n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 n!이고 이를 원형으로 배열하면 n가지씩 회전하여 같아진다.

정답 및 해설 P 2

유제 1-1 서로 다른 6개의 깃발 중에서 5개를 뽑아 원형으로 배열하는 방법의 수는?

① 140 ② 142 ③ 144 ④ 146 ⑤ 148

유제 1-2 남자 5명과 여자 5명을 합하여 10명이 있다. 10명 모두가 원형의 탁자에 둘러앉을 때, 남녀가 교대로 앉는 방법의 수는?

① 4!×4! ② 4!×5! ③ 5!×5! ④ 9! ⑤ 10!

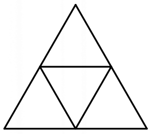
연습 문제

중단원별로 학습한 내용을 난이도별(개념, 실력, 심화)로 구성하여 연산 능력 및 통합적 사고력을 향상시킬 수 있도록 하였습니다.

연 습 문 제

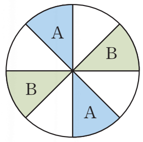
실력 완성

05 오른쪽 그림과 같이 정삼각형으로 이루어진 4개의 영역을 빨강, 파랑, 노랑, 초록의 4가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 8　② 12　③ 16
④ 20　⑤ 24

06 8등분된 원판에 6가지 색 A, B, C, D, E, F를 모두 사용하여 각각의 영역을 구분하려고 한다. 오른쪽 그림과 같이 두 가지 색 A, B는 이미 칠해져 있을 때, 색이 칠해져 있지 않은 영역에 색을 칠할 수 있는 방법의 수는? (단, 한 영역에는 한 가지 색을 칠하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



특강

교과서에는 자세히 다루지는 않지만 실전에 꼭 필요한 개념들을 별도로 모아 학생들의 실력을 한 단계 더 업그레이드 할 수 있도록 하였습니다.

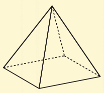
Topic

특강에서 학습한 개념을 요약 정리하였고 문제를 통해 이해를 극대화할 수 있도록 하였습니다.

특강 PRINCIPLES OF MATH

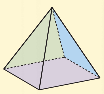
입체도형에 색칠하는 방법의 수

정사각뿔의 각 면을 서로 다른 5가지의 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수를 구해 보자.



(i) 정사각뿔이 고정되어 있어 정사각뿔의 모든 면이 구분된다고 하면 5가지의 색으로 정사각뿔의 모든 면을 칠하는 방법의 수는
$5!$

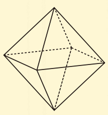
(ii) 정사각뿔을 움직일 때, 밑면(정사각형)은 다른 면과 구분되지만 옆면(이등변삼각형)은 서로 합동이므로 밑면을 기준으로 $90°$씩 회전시키면 서로 겹친다. 즉, 4개의 옆면은 서로 구분되지 않으므로 색이 칠해진 120가지 정사각뿔 중에는 서로 같은 것이 4가지씩 같은 것이 있다.



따라서 서로 다른 5가지의 색을 모두 사용하여 정사각뿔을 칠하는 방법의 수는 다음과 같다.

$$\frac{5!}{4}=30$$

이번에는 정팔면체의 각 면을 서로 다른 8가지의 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수를 구해 보자.



(i) 정팔면체가 고정되어 있어 정팔면체의 모든 면이 구분된다고 하면 8가지의 색으로 정팔면체의 모든 면을 칠하는 방법의 수는
$8!$

(ii) 정팔면체를 움직일 때, 8개의 옆면(정삼각형)은 서로 구분되지 않으

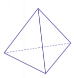
Topic 1 입체도형에 색칠하는 방법의 수　정답 및 해설 P 48

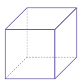
정다각뿔, 정다면체와 같이 회전하여 일치하는 것이 있는 입체도형에 색칠하는 방법의 수는 다음의 순서로 구한다.

① 입체도형이 고정되어 있을 때 모든 면을 칠하는 방법의 수를 구한다.
② 밑면을 정할 때, 서로 일치하는 경우의 수(**밑면의 대체 효과**)와 밑면을 회전시킬 때, 서로 일치하는 경우의 수(**밑면의 회전 효과**)를 구한다.
③ 고정되어 있을 때 칠하는 방법의 수를 서로 일치하는 경우의 수로 나눈다.

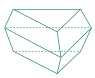
$$\frac{\textbf{(고정되어 있을 때 칠하는 방법의수)}}{\textbf{(밑면의 대체 효과)}\times\textbf{(밑면의 회전 효과)}}$$

Topic 1-1 오른쪽 그림과 같은 정사면체의 각 면에 서로 다른 네 가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수를 a, 정육면체의 각 면에 서로 다른 여섯 가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수를 b라 할 때, $\frac{b}{a}$의 값을 구하여라.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)


[정사면체]


[정육면체]

Topic 1-2 오른쪽 그림과 같이 합동인 정삼각형 2개와 합동인 등변사다리꼴 6개로 이루어진 팔면체가 있다. 팔면체의 각 면에는 한 가지의 색을 칠한다고 할 때, 서로 다른 8개의 색을 모두 사용하여 팔면체의 각 면을 칠하는 방법의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



이 책의 차례

Ⅲ 통계

특 강

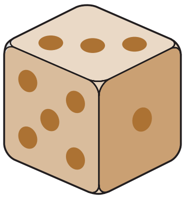
Topic

생각의 질서

I 경우의 수

01 여러 가지 순열

한 개의 주사위를 던질 때,



3의 배수의 눈이 나오는 사건을 A, 4의 약수의 눈이 나오는 사건을 B

라 하면

$$A=\{3,\ 6\},\ B=\{1,\ 2,\ 4\}$$

이다. 이때 두 사건 A, B는 동시에 일어나지 않으므로

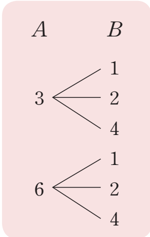
사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $3+2=5$이다.

한편, 한 개의 주사위를 두 번 던질 때,

첫 번째에 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 A,
두 번째에 4의 약수의 눈이 나오는 사건을 B

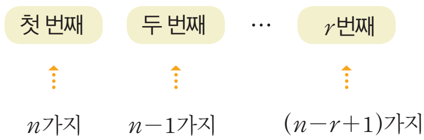
라 하면 사건 A가 일어나는 각각의 경우에 대하여 사건 B가 일어날 수 있으므로

사건 A와 사건 B가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $2\times3=6$이다.



또한, 서로 다른 n개에서 r개를 택해 일렬로 나열할 때,

첫 번째 자리에 올 수 있는 것은 n가지,
두 번째 자리에 올 수 있는 것은 $n-1$가지,
⋮
r번째 자리에 올 수 있는 것은 $(n-r+1)$가지



이다. 따라서 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수 ${}_n\mathrm{P}_r$은 다음과 같다.

$${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}\ (\text{단, } 0\le r\le n)$$

1부터 n까지의 자연수를 차례로 곱한 것을 n의 계승이라 하고, 기호로 $n!$과 같이 나타낸다.

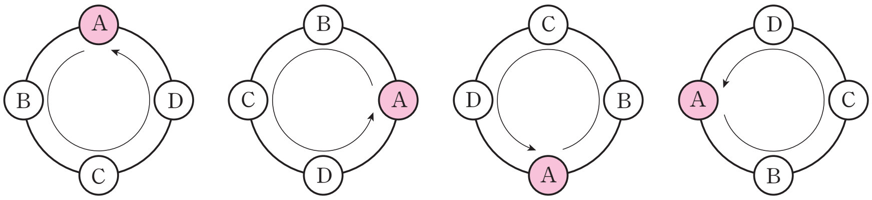
$$n!=1\times2\times\cdots\times n$$

1 원순열

네 개의 문자 A, B, C, D를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$이다. 이때 각각의 경우를 문자열로 나타내면 다음과 같다.

ABCD, BCDA, CDAB, DABC	ABDC, BDCA, DCAB, CABD
ACBD, CBDA, BDAC, DACB	ACDB, CDBA, DBAC, BACD
ADBC, DBCA, BCAD, CADB	ADCB, DCBA, CBAD, BADC

이 중에서 ABCD, BCDA, CDAB, DABC의 경우를 원형으로 배열한 후, 네 문자 A, B, C, D의 위치 관계를 파악해 보자.



위의 각 배열에서

A의 화살표 방향으로 첫 번째 문자는 B, 두 번째 문자는 C, 세 번째 문자는 D

이므로 위의 배열 중에서 어느 하나를 회전시키면 다른 것을 얻을 수 있다. 즉,

A, B, C, D의 위치 관계는 서로 같으므로 위의 각 배열은 모두 같은 것

으로 생각할 수 있다.

이와 같이 네 문자 A, B, C, D를 일렬로 나열한 각각의 문자열을 원형으로 배열하면 4가지씩 서로 같은 것이 있다. 따라서

네 문자 A, B, C, D를 원형으로 배열하는 방법의 수는 $\frac{4!}{4}=3!=6$이다.

일반적으로 서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라 하고, 서로 다른 n개를 일렬로 나열하는 $n!$가지의 순열을 원형으로 배열하면 회전하여 일치하는 경우가 n가지씩 있으므로 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 다음과 같다.

$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

필수개념 원순열

서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라 하고, 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 다음과 같다.

$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

PLUS α

$n!=n\times(n-1)\times\cdots\times1$

연구 1 원순열은 주변의 다른 상황을 무시하고 배열된 것들 사이의 위치 관계만 생각한다. 따라서

원순열에서 회전하여 일치하는 경우를 모두 같은 것으로 생각

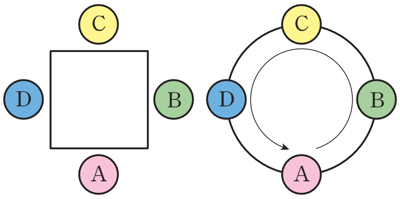
한다. 다만, 회전 방향에 따라 경우가 달라진다는 점에 주의하자.

연구 2 오른쪽 그림과 같이 정사각형 모양의 탁자에

A, B, C, D 네 명이 둘러앉는 방법의 수는

서로 다른 4개를 원형으로 배열하는 원순열의 수

와 같다. 따라서 정사각형 모양의 탁자에 둘러앉는 방법의 수는 다음과 같은 순서로 구할 수 있다.



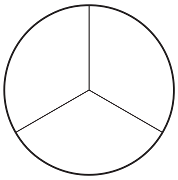
① 네 명을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!$이다.

② $4!$가지 중에 회전하여 같은 것이 4가지씩 있다.

③ 따라서 둘러앉는 경우의 수는 $\frac{4!}{4}=3!=6$이다.

이와 같이 다각형으로 배열하는 경우의 수는 원순열의 수를 구하는 원리와 같은 방법으로 구한다.

연구 3 오른쪽 그림과 같이 3등분한 원판의 세 영역에 3가지 색을 모두 사용하여 칠할 때,

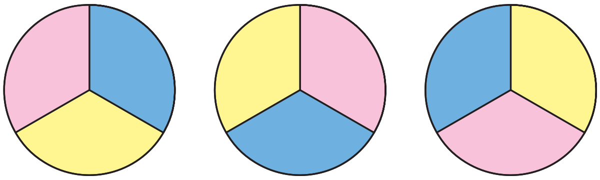


(i) 원판이 고정되어 있어 원판의 세 영역이 서로 구분된다고 하면

원판의 세 영역에 색을 칠하는 방법의 수는 $3!=6$이다.

(ii) 원판을 $120°$씩 회전시키면 세 영역은 서로 일치하므로

색이 칠해진 도형 중에는 회전하여 일치하는 것이 3가지씩 있다.



따라서 원판이 회전할 때,

원판의 세 영역에 서로 다른 3가지 색을 칠하는 방법의 수는 $\frac{3!}{3}=2$

이다.

2 중복순열

두 개의 숫자 1, 2를 중복 사용하여 세 자리 자연수를 만들 때,

백의 자리의 숫자를 택하는 경우는 2가지

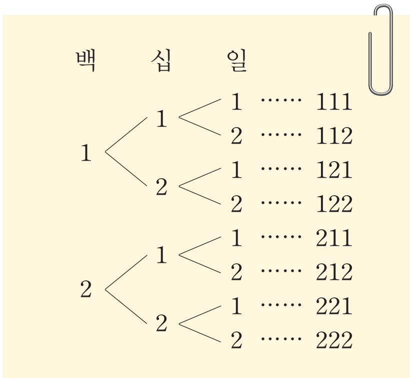
이고, 그 각각에 대하여

십의 자리의 숫자를 택하는 경우는 2가지

이다. 또 그 각각에 대하여

일의 자리의 숫자를 택하는 경우도 2가지

이다.

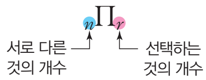


따라서 숫자 1, 2를 중복 사용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$$2\times2\times2=2^3=8$$

이다.

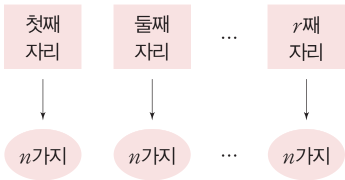
서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택해 일렬로 나열하는 순열을 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 **중복순열**이라 하고, 이 중복순열의 수를 기호 ${}_n\Pi_r$로 나타낸다.



이때 첫째 자리에 올 수 있는 것은 n가지이고, 중복을 허락하므로 둘째 자리에 올 수 있는 것도 n가지이다. 이와 같이

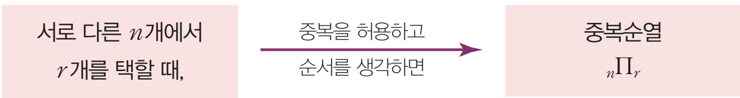
r개의 각 자리에 올 수 있는 것이 각각 n가지씩

이므로 구하는 중복순열의 수는 곱의 법칙에 의하여



$${}_n\Pi_r=\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{개}}=n^r$$

이다.



${}_n\Pi_r$에서 Π는 곱을 뜻하는 Product의 첫 글자 P에 해당하는 그리스 문자로 "파이"라고 읽는다.

필수개념 중복순열

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택해 일렬로 나열하는 것을 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열이라 하고, 이 중복순열의 수를 ${}_n\Pi_r$로 나타낸다.

$${}_n\Pi_r = n^r$$

${}_n\Pi_r$

서로 다른 것의 개수 (n)

선택하는 것의 개수 (r)

PLUS α

중복을 허락하므로 $n<r$인 경우도 있다.

연구 1 0부터 999까지의 정수는 모두 1000개이다. 이때 오른쪽과 같이

0은 000으로, 1은 001로, 12는 012로

생각하면

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 각각 10가지

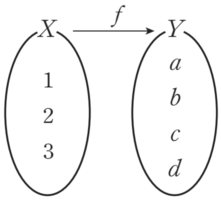
이므로 0부터 999까지의 정수의 개수는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$10\times10\times10=1000$$

000
001
⋮
012
⋮
999

연구 2 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에서 집합 $Y=\{a,\ b,\ c,\ d\}$로의 함수를 f라 하면

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $a,\ b,\ c,\ d$로 4가지
$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $a,\ b,\ c,\ d$로 4가지
$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $a,\ b,\ c,\ d$로 4가지



이다. 따라서 X에서 Y로의 함수 f의 개수는

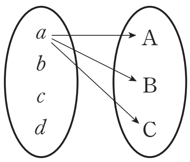
$$4\times4\times4=4^3$$

이다. 일반적으로 다음이 성립한다.

> 집합 X의 원소가 m개, 집합 Y의 원소가 n개일 때,
> 함수 $f: X \longrightarrow Y$의 개수 ➔ ${}_n\Pi_m = n^m$

연구 3 3명의 학생 A, B, C에게 4종류의 책 $a,\ b,\ c,\ d$를 중복을 허락하여 나누어 줄 때,

책 a는 A 또는 B 또는 C에게 줄 수 있다.



즉, 책 a를 3명의 학생에게 나누어 주는 방법의 수는 3이다.
또한, $b,\ c,\ d$를 3명의 학생에게 나누어 주는 방법의 수는 각각 3이므로 3명의 학생에게 서로 다른 4종류의 책을 중복을 허락하여 나누어 주는 방법의 수는

$$3\times3\times3\times3=3^4$$

이다. 이와 같이

중복순열은 중복 가능한 것이 무엇인지 파악하여 곱의 법칙을 이용한다.

3 같은 것이 있는 순열

3개의 문자 a, a, a와 2개의 문자 b, b를 일렬로 나열할 때,

3개의 문자 a를 구별하여 a_1, a_2, a_3

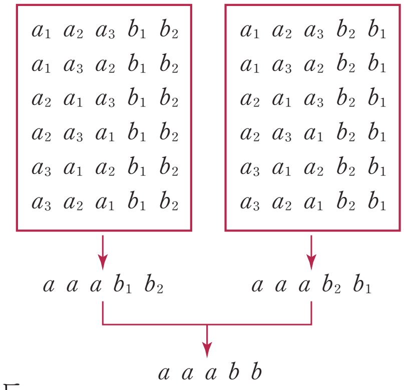
라 하고

2개의 문자 b를 구별하여 b_1, b_2

라 하면 5개의 문자

a_1, a_2, a_3, b_1, b_2를 나열하는 방법의 수는 $5!$

이다. 이때 오른쪽 그림과 같이



$a_1a_2a_3b_1b_2$, $a_1a_3a_2b_1b_2$, $\cdots$, $a_3a_2a_1b_1b_2$

와 같은 문자열에서 a_1, a_2, a_3의 구분이 없다면 위의 문자열은 모두

$aaab_1b_2$

와 같아지므로 5개의 문자 a_1, a_2, a_3, b_1, b_2를 나열할 때,

a_1, a_2, a_3를 구분하지 않는다면 $3!$가지씩 같은 것이 생긴다.

이와 마찬가지로 b_1, b_2를 구분하지 않는다면 $2!$가지씩 같은 것이 생긴다. 따라서

5개의 문자 a, a, a, b, b를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{5!}{3!2!}=10$

이다. 실제로 5개의 문자 a, a, a, b, b를 일렬로 나열한 서로 다른 문자열은 다음과 같다.

$aaabb$, $aabab$, $aabba$, $abaab$, $ababa$
$abbaa$, $baaab$, $baaba$, $babaa$, $bbaaa$

일반적으로 n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개 있을 때, 이들 모두를 일렬로 나열하는 순열의 수는 다음과 같다.

$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!}\ (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$